Aussagenlogik und Prädikatenlogik

Aussagenlogik

Überblick

In der Aussagenlogik geht es insbesondere darum, sprachliche Aussagen auf mathematische Zusammenhänge reduzieren, um damit operieren zu können, z.B. Folgerungen oder äquivalente Aussagen oder Beweise etc. zu treffen. Diese Disziplin hat nichts mit menschlicher Philosophie zu tun, sondern ist eine Anwendung von mathematischen Erkenntnissen, angewandt auf die Sprache. Die Aussagenlogik ist die erste Kategorie und wird durch die Prädikatenlogik um Existenz- und Allquantoren erweitert (z.B. Es existiert mind. ein X für das Y gilt. bzw. für alle X gilt Y).

Formalisierung von Aussagen

Sätze sind in Propositionen zu bringen, dabei stehen Großbuchstaben für Konstanten, Kleinbuchstaben für Variablen. Fragen und Befehle sind keine Aussagen mit einem Wahrheitswert richtig und falsch, sondern eher unter der Kategorie angemessen oder erlaubt zu fassen. Attribute oder Angaben können nach einem Punkt angeschlossen werden. Prädikative Aussagen wie „David ist König“ würde dann formalisiert König(David) lauten. Subjekt und Objekte werden mit einem Verb wie folgt formalisiert: „Das Volk macht David zum König“: Zum König machen(Volk, David). In den Klammern steht erst das Subjekt, dann das Objekt und ggf. andere Angaben wie Zeitpunkte oder –phasen (Zeitvariablen werden mit t abgekürzt). z.B. „Gestern (t1) hat Klaus Berta besucht“: Besuchen(Klaus, Berta, t1). Ob die Aussage aktiv oder passiv ausgedrückt wird, ist unerheblich und nur ein Perspektivwechsel: „Gestern hat Klaus Berta besucht“ ist „Gestern wurde Berta von Klaus besucht“. In der formalisierten Weise ist dies kein Unterschied.

Verbinden von Aussagen mit Junktoren

a) Verneinung

Aussagen werden mit „ $\neg$ “ verneint: „Luise ist von gestern (t1) bis übermorgen (t2) nicht zu Hause“: Zu Hause sein: $\neg$ zu Hause sein(Luise, t1-t2).

Attribute können ebenfalls mit einem Punkt angeschlossen werden: „Klaus hat rote Socken“: haben (Klaus, Socken.rot). Wichtig ist bei Verneinungen, wo sie gesetzt werden (sog. Skopus):

Ganze Aussage verneint

Es ist nicht so, dass Klaus rote Socken hat: $\neg$ (haben(Klaus, Socken.rot))

Satzteile verneint

„Nicht Klaus hat rote Socken“: haben($\neg$ (Klaus), Socken.rot). Impliziert: Jemand anderes, aber Klaus nicht.

„Klaus hat keine rote Socken“: haben (Klaus, $\neg$ (Socken.rot)): Impliziert: Etwas anderes hat er, aber keine roten Socken.

Attribute verneint

„Klaus hat Socken, die nicht rot sind“: haben (Klaus, Socken. $\neg$ rot). Impliziert: Klaus hat Socken, aber rot sind sie nicht. Attribute können zur Verneinung in einen Relativsatz ausgelagert werden.

Kombinationen

Es ist nicht so, dass nicht Klaus keine Socken, die nicht rot sind, hat“: $\neg$ (habe($\neg$ Klaus, $\neg$ Socken. $\neg$ rot))
Klaus hat keine Socken, die nicht rot sind: haben(Klaus, $\neg$ Socken. $\neg$ rot).

Später in der First order logic wird man sehen, dass dies gleichbedeutend mit: „Alle Socken von Klaus sind rot“ ist.

Bemerkenswertes: Reductio ad absurdum

Bei indirekten Beweisen führt eine Aussage wie $A \wedge \neg A$ (es gilt: A und das Gegenteil von A) zu einer falschen Aussage, da eine Aussage nicht wahr und falsch zugleich sein kann (reductio ad absurdum). Bei Verhören durch die Polizei ist dann klar, dass gelogen wurde. Z.B. Mama schickt Klaus zum Einkaufen einer Tüte Milch und gibt ihm das Geld dafür. Klaus will das Geld behalten und begeht Ladendiebstahl. Daheim gibt er die Milch ab. Die Mutter findet das Geld in seinem Geldbeutel jedoch wieder. Klaus wird zur Rede gestellt: Ich habe die Milch gekauft, lügt er. Die Mutter spricht ihn auf das noch vorhandene Geld an: Darauf räumt Klaus ein, dass er die Milch nicht gekauft hat.

Dies ist ein banales Beispiel für eine reductio ad absurdum, da man nicht etwas zugleich kaufen und nicht kaufen kann. Beim indirekten Beweis ist die Herbeiführung von $A \wedge \neg A$ nötig, damit das Gegenteil als falsch erwiesen ist und die Annahme damit richtig ist. Doppelte Negation $\neg\neg A$ lässt sich kürzen auf A kürzen. Z.B. „Es ist nicht so, dass ich kein Eis esse“ bedeutet „ich esse Eis“.

b) Und-Verknüpfung

Die Notation gebraucht hierfür „ $\wedge$ “, um zwei Aussagen zu verbinden. z.B. „Dieter trinkt Kaffee mit Milch“: trinken (Dieter, (Kaffee $\wedge$ Milch)).

c) Oder-Verknüpfung

Dafür wird V (von lat. vel für „oder“) gebraucht. z.B. „Dieter trinkt Kaffee oder Tee“: trinken (Dieter, (Kaffee V Tee)). In der Sprache gibt es ein inklusives und ein exklusives Oder. Da man Tee und Kaffee nicht gleichzeitig trinkt, ist dies exklusiv. Inklusiv wäre in der Umgangssprache weniger häufig, in der Mathematik aber ist dies häufiger sinnvoll: „Wollen Sie Kaffee oder Milch?“ – Darauf kann man sagen: „Ich nehme beides, da ich den Kaffee mit Milch trinke“. Ein weiteres mögliches Beispiel: „Vertragen sie Kaffee oder Tee?“

Die mathematische Oder-Verknüpfung ist dann wahr, wenn eine oder beide Aussagen wahr sind. Nur dann ist sie falsch, wenn beide Aussagen falsch sind.

d) Wenn-dann-Junktor/das Konditional

Diese Relation von Aussagen wird mit „ $\rightarrow$ “ formalisiert, z.B. „Wenn schönes Wetter ist, gehen wir schwimmen“: Wetter (schön) $\rightarrow$ schwimmen(wir)

In beide Richtungen lautet der Junktor bidirektional und wird mit „ $\leftrightarrow$ “ markiert. Diese steht für die Und-Verknüpfung in beide Richtungen: $P \rightarrow Q \wedge Q \rightarrow P$. Z.B. Falls Klaus kommt, kommt Ute und falls Ute kommt, kommt Klaus: $\text{Kommen}(\text{Klaus}) \leftrightarrow \text{Kommen}(\text{Ute})$.

e) Zusammenfassung und Terminologie

$\neg$ Verneinung

$\wedge$ Zusammenfassung einer Menge von Sätzen

$\vee$ Fallunterscheidung

$\rightarrow$ logische Folgerung, Schluss, Konsequenz

$\leftrightarrow$ Äquivalenz, gleichbedeutend mit „=“, auf beiden Seiten das Gleiche steht.

f) Beispiele

- Wie formalisiert man den Satz aus dem Alten Testament: Wer anderen eine Grube gräbt, fällt selbst hinein (zunächst vereinfacht und nur Aussagenlogisch und noch nicht per Prädikatenlogik):

graben (X, Grube, y) $\rightarrow$ fallen (X, Grube). X ist eine Variable und steht für „jemand“, d.h. es kann jede Einzelperson eingesetzt werden. Dabei X eine Konstante, die für den Grubengräber steht, y eine Variable für die Opfer.

- „Jeder Hund ist ein Säugetier“ kann formalisiert werden: $\text{Hund}(X) \rightarrow \text{Säugetier}(X)$. Anders ausgedrückt: Für jedes konkrete X (Konstante) gilt: Ist es ein Hund, dann ist X auch ein Säugetier. Die Konstante kein ein konkreter Hund sein: $\text{Hund}(\text{Schnuffi}) \rightarrow \text{Säugetier}(\text{Schnuffi})$: Wenn Schnuffi ein Hund ist, dann ist er ein Säugetier. Die Reduktion von Allgemeinen Aussagen auf Einzelaussagen benötigt jedoch Einsichten der second order logic, d.h. wie damit gerechnet und was bewiesen werden kann.

Mathematische Zusammenhänge und Fehler

DeMorgan-Gesetze

$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ bzw. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Die Negation („ $\neg$ “) wird in die Klammer gezogen und bewirkt einen Wechsel von „und“ zu „oder“ und umgekehrt. Vgl. Klaus trinkt Kaffee nicht mit Milch zusammen: $\text{trinken}(\text{Klaus}, \neg(\text{Kaffe} \wedge \text{Milch}))$. Dies ist nach DeMorgan gleichbedeutend mit: $\text{trinken}(\text{Klaus}, (\neg \text{Kaffe} \vee \neg \text{Milch}))$. D.h. in natürlicher Sprache: Klaus trinkt entweder Kaffee oder Milch, aber nicht beides zusammen (exklusives Oder). Somit sind beide Aussagen gleichbedeutend.

Auch in einfachen Beweisen ist dies wichtig: Spielt Susanne oder macht sie Hausaufgaben? $\text{spielen}(\text{Susanne}) \vee \text{Hausaufgaben}(\text{Susanne})$. Dann wird sie im Garten beim Spielen gesehen, also $\text{spielen}(\text{Susanne}) \leftrightarrow \neg \text{Hausaufgaben}(\text{Susanne})$. Wenn weder das eine noch das andere der Fall ist, z.B. Susanne ist beim Essen, dann ist die Frage/Prämisse falsch.

Tautologische Aussagen

Dieser Typ kann nie falsch werden und stimmt immer. Vgl. „Wenn der Hahn auf dem Mist kräht, ändert sich das Wetter, oder das Wetter bleibt, wie es ist.“ $\text{Krähen}(\text{Hahn}, \text{auf Mist}) \rightarrow$

ändern(Wetter) $\vee$ $\neg$ (ändern(Wetter)). Die Folge hat also nichts mit den Prämissen zu tun, egal ob der Hahn kräht, das Wetter ändert sich oder nicht. Somit ist die Aussage tautologisch und immer wahr.

Zulässige Schlüsse

Modus Ponens

Dieses Gesetz erscheint banal, aber ist für spätere Beweisführungen unabdingbar, z.B. wenn ein Faktor als wahr oder falsch erkannt wurde:

$P \rightarrow Q$. P ist wahr, dann ist Q auch wahr. Jeden Sonntag fängt die neue Woche an:

Wochentag(Sonntag) $\rightarrow$ Anfang (Woche.neu). Heute ist Sonntag und kein anderer Wochentag, daher ist der Wochenanfang.

Modus Tollens

$P \rightarrow Q$. Q ist falsch, dann ist auch P falsch. Vgl. beim Auto springt der Motor an, wenn man den Zündschlüssel dreht. Der Zündschlüssel ist nicht gedreht, also springt der Motor nicht an. Wie der Modus Ponens ist der Modus Tollens in Beweisketten ein wichtiger Faktor. Der MT hat in der Wissenschaftsgeschichte mit Karl Popper große Berühmtheit erlangt: Wenn ein Tier ein Schwan ist, dann ist er weiß. Es wurden aber auch schwarze Schwäne gefunden, daher ist die Prämisse falsch und gilt als falsifiziert.

Hypothetischer Syllogismus

$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$. Beispiel: Wenn der Boden gefriert, wird die Straße glatt. Wenn die Straße glatt ist, gibt es mehr Unfälle: (gefrieren(Boden) $\rightarrow$ glattwerden(Straße) $\rightarrow$ vermehren(Unfälle)) $\rightarrow$ (gefrieren(Boden) $\rightarrow$ vermehren(Unfälle)). D.h. man kann eine Aussage überspringen und die Wahrheit bleibt dennoch erhalten.

P $\vee$ Q, gegeben $\neg$ P, also Q

Beispiel: Wollen Sie entweder Tee oder Kaffee? Ich will keinen Tee. Also bekomme Sie einen Kaffee. In vielen Disziplinen gilt dies als Ausschlussverfahren, z.B. kann man in Oder-Aussagen alle Möglichkeiten falsifizieren und dann bleiben die richtigen übrig: $A \vee B \vee C \vee D \vee E$. Beweise für E: $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D$. Beispiel: Ein netter Nachbar hat mir einen Geburtstagskuchen vor die Türe gestellt. Wir haben fünf Nachbarn. Ich konnte vier befragen, alle haben mir nichts vor die Türe gestellt, daher war es der fünfte. Prüft man alle Möglichkeiten, was teilweise bei größeren Daten enormer Aufwand ist, nennt man dies vollständige Induktion. Vgl. zum Unterschiede: Ist die Kiste Limo voll? Wenn eine Flasche schon fehlt, ist die Aussage negativ. Man kann aber auch vollständig nachzählen, dann bekommt man ein exaktes Ergebnis, auch wenn bereits bei der ersten fehlenden Flasche die Aussage falsch ist (wichtig im sog. Resolutionskalkül).

Äquivalenzen zur Implikation: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow Q \rightarrow \neg P \Leftrightarrow P \vee Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

Der erste Teil $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$ (Transpositionsgesetz):

Der zwingende Schluss kann anhand einer doppelten Prämisse gezeigt werden: Wenn man falsch parkt und die Polizei bemerkt es, bekommt man einen Strafzettel: falschparken (X) $\wedge$ bemerken (Polizei, falschparken (X)) $\rightarrow$ bekommen(X, Strafzettel). Dies ist äquivalent zu: $\neg$ (bekommen(X, Strafzettel)) $\rightarrow$ ($\neg$ falschparken (X) $\vee$ $\neg$ bemerken (Polizei, falschparken (X))). D.h. Wenn jemand keinen Strafzettel bekommt, hat er nicht falsch geparkt und/oder die Polizei hat es nicht bemerkt. Die zweiteilige Prämisse ist nach dem DeMorgan Gesetz umzuwandeln, wenn eine Negation vor einer Und-Verknüpfung erscheint. Es kann also sein, dass jemand keinen Strafzettel bekommt, obwohl er falsch geparkt hat, aber die Polizei hat es nicht bemerkt. Wenn der Fahrer nicht falsch parkt und die

Polizei hat es bemerkt, bekommt er ebenfalls keinen Strafzettel.

Der zweite Teil $\neg P \vee Q$ (Materiale Implikation):

Formalisiert: $\neg(\text{falschparken}(X) \wedge \text{bemerken}(\text{Polizei}, \text{falschparken}(X))) \vee \text{bekommen}(X, \text{Strafzettel})$.

DeMorgan bei der Prämisse: $(\neg(\text{falschparken}(X) \vee \neg(\text{bemerken}(\text{Polizei}, \text{falschparken}(X)))) \vee \text{bekommen}(X, \text{Strafzettel})$. D.h. Man hat nicht falsch geparkt oder die Polizei hat es nicht bemerkt, sonst/oder bekommt man einen Strafzettel.

Die letzte Formel $\neg(P \wedge \neg Q)$ bedeutet: Es ist nicht so, dass wenn man falsch parkt und die Polizei sieht es, keinen Strafzettel bekommt.

Verneinung der Implikation: $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

Beispiel: „Es ist nicht so, dass wenn man richtig parkt, einen Strafzettel bekommt“ ist gleichbedeutend mit: „Man hat einen Strafzettel und (zuvor) nicht richtig geparkt“.

Fehlschlüsse

Fehlschlüsse sind oft in Religion und Politik und privat etc. zu hören, bewusst oder unbewusst.

Formal wird dies mit „*“ markiert. Im Folgenden werden einige typische angeführt.

Inversion/Affirming the consequent

* $A \rightarrow B \Leftrightarrow B \rightarrow A$: „Wenn Klaus Grippe hat, geht er zum Arzt“ ist nicht gleichbedeutend mit „Klaus hat Grippe, da er beim Arzt war“. Klaus kann auch Krebs haben und deshalb beim Arzt sein.

Verneinung der Prämisse

* $A \rightarrow B \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$. Bei diesem häufigen Fehlschluss verkennt man, dass es andere Ursachen für die Konsequenz geben kann als nur die genannte Prämisse. Vgl. „Wenn ich Geld habe, werde ich in den Urlaub fahren“ ist nicht gleichbedeutend mit: „Wenn ich keine Geld habe, werde ich nicht in den Urlaub fahren“. Die Konklusion ist evtl. von anderen Prämissen aus realisierbar, evtl. kann man eingeladen worden sein.

Tertium non datur

Es gäbe nur 2 etc. Möglichkeiten und keine anderen etc. In der Politik gab es die Prämisse: Entweder bist du für die Partei oder gegen die Partei, X ist nicht für die Partei, also ist er gegen die Partei. Dabei bleibt außer Acht, dass es weitere Möglichkeiten gibt, und nicht nur das Entweder-Oder. Im o.g. Fall kann es sein, dass jemand Politik nicht interessiert und er weder für noch gegen eine Partei ist.

Prädikatenlogik/Second Order Logic

Einleitung

Die Prädikatenlogik ist eine Erweiterung der Aussagenlogik. Die Junktoren ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) haben in der Prädikatenlogik/Second order logic die gleiche Semantik wie in der Aussagenlogik. Dabei sind die Begriffe Allquantor $\forall$ und Existenzquantor $\exists$ zusätzlich einzuführen. Der erste Quantor bezieht sich auf alle Elemente einer Menge. Der zweite, dass mindestens ein Element in der Menge vorhanden ist.

Formalisierung

„Kein Mitarbeiter ist unkündbar“ bzw. „Alle Mitarbeiter sind nicht unkündbar“. $\forall x: \text{Mitarbeiter}(x) \rightarrow$

$\neg$ unkündbar(x). Ausgesprochen: Für alle x gilt, wenn x ein Mitarbeiter ist, dann ist x nicht unkündbar. Später werden wir sehen, dass dies äquivalent zur Aussage ist: Alle Mitarbeiter sind kündbar.

„Nicht alle Menschen sind hilfsbereit“: $\neg\forall x: \text{Mensch}(x) \rightarrow \text{hilfsbereit}(x)$. Ausgesprochen: Nicht für alle x gilt: Ist x ein Mensch, dann ist er hilfsbereit. Diese Aussage ist äquivalent zu: Es gibt Menschen, die sind nicht hilfsbereit. Vgl. auch „Es gibt einen Mann, der im Rollstuhl fährt“. $\exists x: \text{Mann}(x) \wedge \text{Rollstuhlfahrer}(x)$.

Äquivalenzen

$\forall x: f \leftrightarrow \neg\exists x: \neg f$: D.h. für alle x gilt f, d.h. es gibt kein x, für das f nicht gilt. Ein Beispiel aus dem Neuen Testament: (Gott will), dass alle Menschen gerettet werden. $\forall x: \text{Mensch}(x) \rightarrow \text{Rettung}(x)$
 $\leftrightarrow \neg\exists \text{Mensch}(x) : \neg \text{Rettung}(x)$. D.h. die Aussage ist gleichbedeutend damit, dass es keinen Menschen gibt, der nicht durch das Blut Christi gerettet werden soll.

$\neg\forall x: f \leftrightarrow \exists x: \neg f$: Etwas gilt nicht für die gesamte Menge, d.h. es gibt Elemente für die eine Aussage nicht gilt. Vgl. die Anwendung am Ende des Skripts.

Modallogik

Dieser Teilbereich befasst sich mit Notwendigkeiten oder Möglichkeiten und bringt diese Kategorien in ein mathematisch fassbares Gerüst. Die Modaloperatoren sind $\square$ für „müssen“ (Notwendigkeit) und $\diamond$ für „können“ bzw. „möglich sein“ (Möglichkeit).

Formalisierung

$\diamond p$: Es kann p sein.

$\neg\diamond p$: Es kann nicht sein, dass p ist.

$\diamond\neg p$: Es kann sein, dass nicht p ist.

$\neg\diamond\neg p$: Es kann nicht sein, dass p nicht ist.

$\square p$: Es muss p sein.

$\neg\square p$: Es muss nicht sein, dass p ist.

$\square\neg p$: Es muss sein, dass p nicht ist.

$\neg\square\neg p$: Es muss nicht sein, dass p nicht ist.

Äquivalenzen

$\square p \leftrightarrow \neg\diamond\neg p$ (vgl. $\forall x p(x) \leftrightarrow \neg\exists x \neg p(x)$). „Es muss sein, dass gegessen wird, ist gleichbedeutend mit: „es kann nicht sein, dass nicht gegessen wird“.

$\diamond p \leftrightarrow \neg\square\neg p$ (vgl. $\exists x p(x) \leftrightarrow \neg\forall x \neg p(x)$). „Es ist möglich, dass es regnet“ ist gleichbedeutend mit: „Es muss nicht sein, dass es nicht regnet“.

$\diamond\neg p \leftrightarrow \neg\square p$: „Es kann sein, dass Klaus kein Lehrer ist“ ist gleichbedeutend mit „Es ist nicht notwendig, dass Klaus ein Lehrer ist“

$\neg\square p \leftrightarrow \diamond\neg p$: „Es ist nicht notwendig, dass Gustav arbeitet“ ist gleichbedeutend mit „Es ist möglich, dass Gustav nicht arbeitet“.

Axiome

$p \rightarrow \blacklozenge p$ „Wenn p ist, kann p auch sein“.

$\Box p \rightarrow \blacklozenge p$ „Wenn p sein muss, dann kann p auch sein“.

$p \rightarrow \Box \blacklozenge p$ „Wenn p ist, muss p auch sein können“.

$\blacklozenge p \rightarrow \Box \blacklozenge p$ „Wenn p sein kann, muss p auch sein können“.

Quantoren

$\forall x \blacklozenge p$: Für alle x kann p gelten.

$\exists x \blacklozenge p$: Es existiert mind. ein x, für das p gelten könnte. etc.

Temporale Logik

Damit wird mit $\blacklozenge p$ „es gilt irgendwann p“ und mit $\Box p$ „es gilt immer p“ ausgedrückt. Z.B. $\blacklozenge p \leftrightarrow \neg \Box \neg p$: „Es schneit irgendwann“ ist äquivalent zu „es ist nicht immer so, dass es nicht schneit“. Bzw. $\neg \Box p \leftrightarrow \blacklozenge \neg p$: „Karl hustet nicht immer“ ist gleichbedeutend mit „Es ist irgendwann so, dass Karl nicht hustet“.
 $\blacklozenge \neg p \leftrightarrow \neg \Box p$: „Irgendwann ist es so, dass es keinen Strom mehr gibt“ bedeutet „Es ist nicht immer so, dass es Strom geben wird“.

Deontische Logik

Damit wird mit $\blacklozenge p$ „p ist erlaubt“ und mit $\Box p$ „p ist geboten“ ausgedrückt. Analoge Anwendung der Äquivalenzen, z.B. $\Box p \leftrightarrow \neg \blacklozenge \neg p$: „Es ist geboten, zu singen“ ist gleichbedeutend mit „Es ist nicht erlaubt, nicht zu singen“ bzw. mit anderen Logiken verknüpft: „Das Nicht-Singen ist nicht notwendig“. $\blacklozenge \neg p \leftrightarrow \neg \Box p$: „Es ist erlaubt, nicht zu arbeiten“ bedeutet „Man muss nicht arbeiten“.

Epistemische Logik

Damit wird mit $\blacklozenge p$ „X hält es für möglich“ und mit $\Box p$ „X hält es für sicher“ ausgedrückt.

$\neg \Box p \leftrightarrow \blacklozenge \neg p$: „Karl meint: Es ist nicht sicher, dass wir morgen noch leben“ ist gleichbedeutend mit „Karl meint: Es ist möglich, dass wir morgen nicht mehr leben“.

Anwendbarkeit der Äquivalenzen der Aussagenlogik

Die bereits gezeigten Entsprechungen sind in der Modallogik voll anwendbar. Vgl. z.B.:

$\Box p \rightarrow \blacklozenge p \leftrightarrow \neg \blacklozenge \neg p \rightarrow \neg \Box p$ „Wenn es sicher ist, dass heute Montag ist, dann kann heute Montag sein“ (Abschwächung der Aussage). Dies ist äquivalent zu „Wenn nicht Montag sein kann, ist es nicht sicher, dass Montag ist“ (dito).

Erweiterungsmöglichkeiten

Die genannten Zusammenhänge lassen sich auf weitere Zusammenhänge anwenden, wobei $\Box$ die Obermenge/bzw. hierarchisch/semantisch/strukturell etc. höherwertiger als $\blacklozenge$ ist, das dann eine Untermenge, Abschwächung, untergeordnet etc. ist. Z.B. Zeitdauer $\Box$ und Zeitpunkt $\blacklozenge$:

$\neg \Box p \leftrightarrow \blacklozenge \neg p$: „Es ist nicht dauernd nass“ bedeutet „es gibt Zeitpunkte, wo es nicht nass ist“.

Gruppe $\Box$ vs. Einzelne $\blacklozenge$: „Nicht die ganze Gruppe freut sich“ bedeutet „Einzelne freuen sich nicht“.

Ganzes $\square$ vs. Teile $\blacklozenge$: $\square p \leftrightarrow \neg\blacklozenge\neg p$: „Ganz Deutschland weint“ heißt „Es gibt keinen Teil Deutschlands, der nicht weint“. „Meine ganzes Auto ist kaputt“ heißt „Es gibt keinen Bestandteil des Autos, der nicht kaputt ist“.

Körper $\square$ vs. Organe $\blacklozenge$: „Der ganze Körper funktioniert“ heißt „Es gibt kein Organ, das nicht funktioniert“.

Erweiterbar z.B. Firma-Mitarbeiter; Bund-Länder. Hund – Dobermann. Tiere – Gattung. Orchester-Musiker. Total – teilweise. Satz – Satzteil.

Gelegentlich vs. immer. Z.B. $\blacklozenge\neg p \leftrightarrow \neg\square p$: „Gelegentlich ist Karl nicht gesund“ bedeutet „Nicht immer ist Karl gesund“.

Beweise

a) Direkter Beweis

Eine Aussage kann positiv belegt werden. $A \rightarrow C$, A ist gegeben, dann ist C bewiesen, z.B. wird die allgemeine Aussage „Wenn die Sonne scheint, wird es wärmer“ im Falle, dass es an einem bestimmten Tag Sonne hat, A also gegeben ist, direkt bewiesen. Am Montag schien die Sonne. Dann kann jeder folgern: Also wurde es wärmer als zuvor.

b) Indirekter Beweis

Eine Aussage kann belegt werden, indem das Gegenteil als falsch erwiesen ist. Behauptung: $A \rightarrow C$. Beleg: $\neg(A \rightarrow C) \rightarrow D \wedge \neg D$. Die Aussage konnte ad absurdum geführt werden und führte zu einem Widerspruch, z.B. „Wenn die Sonne scheint wird es wärmer“ wird mit „nicht“ negiert, d.h. man nimmt an, die Aussage sei falsch, es würde also bei Sonnenschein nicht wärmer, das wäre Aussage $\neg D$. Wenn man die Temperatur misst und es wird tatsächlich wärmer, bekommt man die Aussage D. Man hat also zwei Aussagen, die zugleich nicht wahr sein können: $D \wedge \neg D$. Das beweist, dass die negierte Aussage, also dass die Sonne nicht zur Erwärmung beiträgt, falsch ist und das Gegenteil stimmt, d.h. indirekt wurde die Richtigkeit der Aussage bestätigt, indem das Gegenteil als falsch erkannt wurde.

Anwendungsbeispiel

Anhand der bisherigen Darstellung, hier die der second order logic, gelingt es, die beiden mit „und“ verknüpften Aussagen in Johannes 1.13 als äquivalent zu erkennen, d.h. es handelt sich um eine Aussage in zweifacher Weise bzw. um einen synonymen Parallelismus.

„Alles wurde durch ihn, und ohne ihn wurde auch nicht eines, was geworden ist“.

Die Formalisierung der beiden Aussagen sollte nun einfach möglich sein:

$\forall x: \text{geworden}(x, \text{ durch Christus}) \Leftrightarrow \neg\exists x \neg\text{geworden}(x, \text{ durch Christus})$

Ingolstadt, 28.12.2020

Peter Streitenberger